ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1987

OPTION P'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, on considère d'une part des fonctions φ à valeurs réelles, définies, continues et bornées sur $\mathbb{R}$, et on note $\| \varphi \|$ la borne supérieure de $| \varphi |$. On considère d'autre part des fonctions ψ à valeurs réelles bornées et *en escalier sur* $\mathbb{R}$; on entend par là que ψ est définie sur le complémentaire E d'une partie de $\mathbb{R}$ finie ou dénombrable, dépendant de ψ, et dont l'intersection avec toute partie bornée de $\mathbb{R}$ est finie. Ainsi, E est la réunion d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et, éventuellement, d'une ou deux demi-droites ouvertes de $\mathbb{R}$; sur chacun de ces intervalles ou demi-droites, ψ est constante, et de plus ψ est bornée sur E ; on note $\| \psi \|$ la borne supérieure de $| \psi |$ sur E.

On utilisera l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}_2$ des fonctions à valeurs réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui sont de plus bornées sur $\mathbb{R}$ ainsi que leurs deux premières dérivées, et les sous-espaces $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{E}_3$ de $\mathcal{C}_2$ respectivement constitués des fonctions $f \in \mathcal{C}_2$ qui, pour $f \in \mathcal{C}_3$, ont une dérivée troisième continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et, pour $f \in \mathcal{E}_3$, ont une dérivée troisième en escalier et bornée sur $\mathbb{R}$.

♦

I

1. Soit A une fonction à valeurs réelles, définie, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, telle que, de plus, pour toute $f \in \mathcal{C}_3$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t) f'''(t)\, dt = 2\pi f'(0) - f(\pi) + f(-\pi) \quad .$$

a. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} A(t)\, dt$.

b. Ecrire la série de Fourier (sous forme réelle) de A et comparer sa somme à A. *On suppose désormais* A *continue sur* $\mathbb{R}$; A est-elle unique ?

c. En écrivant une formule de Taylor convenable pour chacune des deux différences $f(\pi) - f(0)$ et $f(-\pi) - f(0)$, trouver une expression explicite de la restriction de A à $[-\pi, \pi]$ et dessiner le graphe de cette restriction.

2.a. Pour quelles valeurs de $t \in [-\pi, \pi]$ la série dérivée terme à terme de la série de Fourier de A converge-t-elle vers la dérivée A' de A ?

b. Donner, pour les diverses valeurs de $t \in [-\pi, \pi]$, la somme $B(t)$ de cette série dérivée et dessiner son graphe.

c. Pour $f \in \mathcal{C}_3$, calculer $\int_{-\pi}^{\pi} B(t) f''(t)\, dt$ à l'aide de valeurs convenables de f et de f'.

d. Dans l'égalité qui vient d'être obtenue, par quelles fonctions de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ peut-on remplacer B sans que cette égalité cesse d'être valable pour toute $f \in \mathcal{C}_3$?

♦

II

Dans cette partie, on cherche, pour toute $f \in \mathcal{C}_2$, à majorer $\| f' \|$ à l'aide de $\| f \|$ et de $\| f'' \|$. T est un réel strictement positif et a un réel quelconque.

1.a. Indiquer une fonction H_1 réelle définie et continue sur $[0, T]$ telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}_2$,

$$T f'(a) = f(a + T) - f(a) + \int_0^T H_1(t) f''(a + t)\, dt \quad .$$

b. En déduire une majoration de $\| f' \|$ en fonction de $\| f \|$, $\| f'' \|$ et T.

2.a. Trouver une fonction H_2 réelle, définie et de classe C^1 par morceaux sur $[-T, T]$ telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}_2$,

$$2T f'(a) = f(a + T) - f(a - T) + \int_{-T}^{T} H_2(t) f''(a + t)\, dt \quad .$$

Cette fonction H_2 est-elle unique ?

b. En déduire une majoration de $\| f' \|$ en fonction de $\| f \|$, $\| f'' \|$ et T, et comparer cette majoration à celle obtenue en II.1.b.

c. Lorsque $\| f \|$ et $\| f'' \|$ sont donnés, quelle valeur T_0 de T faut-il choisir pour obtenir par la méthode de la question II.2.b. la meilleure majoration de $\| f' \|$, et quelle est cette majoration ?

3.a. Montrer qu'à toute fonction $f \in \mathcal{C}_2$ on peut, par un choix convenable des paramètres réels λ et μ, associer une fonction $g \in \mathcal{C}_2$ définie par $g(t) = \mu f(\lambda t)$ et telle que $\| g \| = 1$ et $\| g'' \| = 2$.

b. Pour la fonction g, quelle majoration obtient-on pour $\| g' \|$ et à quelle valeur T_0 définie dans II.2.c correspond-elle ?

Tournez la page S. V. P.

4.a. Dire pourquoi l'égalité donnée dans la question II.2.a. reste valable si on y remplace f par une fonction réelle θ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, bornée ainsi que sa dérivée première, et admettant une dérivée seconde bornée et en escalier sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver une telle fonction θ qui, de plus, soit impaire, périodique de période 4, et vérifie les égalités

$$\| \theta \| = 1 , \qquad \theta'(0) = 2 , \qquad \| \theta'' \| = 2 \quad .$$

Dessiner le graphe de la restriction de θ à $[-1, 3]$.

c. Trouver, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, une fonction $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_2$, impaire et de période 4, et telle que

$$\| g_\varepsilon - \theta \| \leqslant \varepsilon , \quad \| g_\varepsilon' - \theta' \| \leqslant \varepsilon , \quad \| g_\varepsilon'' \| = 2 \quad .$$

d. Pourrait-on, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2$, améliorer la majoration obtenue en II.2.c. ?

♦

III

Dans cette partie, on cherche, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{E}_3$, à majorer $\| f' \|$ et $\| f'' \|$ à l'aide de $\| f \|$ et de $\| f''' \|$. T est encore un réel strictement positif et a un réel quelconque.

1.a. Trouver une fonction K_1 réelle, définie et de classe C^1 par morceaux sur $[-T, T]$, telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}_3$,

$$2T f'(a) = f(a + T) - f(a - T) + \int_{-T}^{T} K_1(t) f'''(a + t)\, dt \quad .$$

Cette fonction K_1 est-elle unique ?

b. Dire pourquoi l'égalité précédente reste valable si l'on suppose que f appartient à $\mathcal{E}_3$.

c. En déduire, pour toute $f \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{E}_3$, et en choisissant T au mieux, une majoration de $\| f' \|$ en fonction de $\| f \|$ et de $\| f''' \|$, et calculer cette majoration numériquement lorsque $\| f \| = 1$ et $\| f''' \| = 24$.

d. Trouver une fonction $h \in \mathcal{E}_3$ telle que $\| h \| = 1$, $\| h''' \| = 24$ et $h'(0) = 3$.

2.a. Trouver une fonction K_2 réelle définie et continue par morceaux sur $[-T, T]$ telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{E}_3$,

$$T^2 f''(a) = f(a + T) + f(a - T) - 2f(a) + \int_{-T}^{T} K_2(t) f'''(a + t)\, dt \quad .$$

b. En déduire, en choisissant T au mieux, une majoration de $\| f'' \|$ en fonction de $\| f \|$ et de $\| f''' \|$. Calculer numériquement cette majoration lorsque $\| f \| = 1$ et $\| f''' \| = 24$.

3. On suppose dans cette question que $f \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{E}_3$ vérifie l'égalité $\| f' \| = 3$ et les deux inégalités $\| f \| \leqslant 1$ et $\| f''' \| \leqslant 24$.

a. Montrer que ces deux inégalités sont en fait des égalités.

b. Si, de plus, il existe un réel a tel que $|f'(a)| = 3$, montrer que f''' a, sur $[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}]$, une valeur constante égale à 24 ou à -24, et établir l'égalité $\| f'' \| = 12$.

c. Etablir la même égalité $\| f'' \| = 12$ dans le cas où $|f'(a)| < 3$ pour tout a réel [on pourra, par exemple, majorer l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{2}+\alpha}^{\frac{1}{2}-\alpha} [24 + f'''(a_n + t)]\, dt$$

où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ est fixé et où les a_n sont des réels tels que $\lim_{n \to +\infty} f'(a_n) = 3$].

♦ ♦ ♦